Teoretická část - 20.5.2022

1. (a) Definujte prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (konvergenci v těchto prostorech definovat nemusíte) $(1,5$ bodu).

   (b) Definujte Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci pro funkce z $L^1(\mathbb{R}^d)$. Definujte konvoluci funkcí z $L^1(\mathbb{R}^d)$ (1 bod).

   (c) Zformulujte větu o Fourierově transformaci na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $(0,5$ bodu).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

      i. $f \in L^1(\mathbb{R})$,
      ii. $f * g \in L^1(\mathbb{R})$,
      iii. $f * g = g * f$,
      iv. $(f * g) * h = f * (g * h)$,
      v. je-li $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, potom $f * g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
      vi. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\mathcal{F}(g) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)g$,
      vii. je-li $\phi \in L^1$ a $\mathcal{F}(\phi) \in L^1$, potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi))f = \int_{-\infty}^{\infty} \phi f.$$

   Vše řádně zdůvodněte (5 bodů).

2. (a) Definujte Laurentovu řadu (1 bod).
   (b) Zformulujte věty o Cauchyho vzorci, holomorfní funkci jako mocninné řadě a holomorfní funkci jako Laurentově řadě (3 body).
   (c) Zformulujte větu jednoznačnosti pro holomorfní funkce (1 bod).
   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro **oblast** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ a $f \in H(\Omega)$:
      i. je-li f' nulová na okolí bodu a, potom f je konstantní na Ω,
      ii. je-li f' nulová na okolí bodu a, potom f je konstantní na okolí bodu a,
      iii. je-li $f^{(n)}(a)$ nenulová jen pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, potom existuje polynom P, že $f = P$ na Ω,
      iv. je-li $f^{(n)}(a)$ nenulová jen pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, potom existuje polynom P, že $f = P$ na okolí bodu a.

      Vše řádně zdůvodněte (3 body).

3. (a) Definujte prostory $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$ a konvergenci na nich (2 body).
   (b) Definujte posunutí, škálování, derivaci a nísobení funkcí v $\mathcal{D}'(\Omega)$ (2 body).
   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro posloupnost $\{T_n\} \subset D'(\mathbb{R})$ a distribuci $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
      i. je-li T regulární, potom je T' regulární,
      ii. je-li T regulární, potom existuje S regulární distribuce, že $S' = T$,
      iii. je-li $\langle e^x T, \varphi \rangle = 0$, pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, potom $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
      iv. je-li $\langle xT, \varphi \rangle = 0$, pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, potom $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
      v. pokud $T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T$, potom $T_n'' \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T''$,
      vi. pokud $T_n'' \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T''$, potom $T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T$,
      vii. je-li $f \in L^1_{loc}$ a T_f regulární distribuce reprezentující f, potom $s_{\frac{1}{3}} T_f = T_{s_{\frac{1}{3}} f}$.

   Vše řádně zdůvodněte (4 body).